Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 52–61

DOI.10.22067/tmsj.2023.83518.1045

Expository Article

SYMMETRY AND MATHEMATICS

FARIBA NOOHI[1]

[1]Department of Computer, Alzahra Technical Training Institute, Mashhad
fnoohi@tvu.ac.ir , f.noohi@gmail.com

Abstract. The observation of symmetry and its failure in the early world-view begins with nature and art, and then it is defined as a basic structure in mathematics. In this article, after a short talk about symmetry, we will discuss its application in finding the roots of quadratic equations and see how much more difficult the lack of symmetry makes solving quadratic equations.

2020 Mathematics Subject Classification. 00A05, 97I10
Keywords. function, solve the equation, symmetry, Polynomial,
Date: Rceived 22-7-2023 Revised 12-8-2023 Accepted 17-9-2023 Available Online 18-9-2023

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۵۲–۶۱
DOI. 10.22067/tmsj.2023.83518.1045
مقاله علمی-ترویجی

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

تقارن و کاربرد آن در حل معادلات

فریبا نوحی[۱]

[۱]گروه کامپیوتر، آموزشکده فنی و حرفه ای الزهرا، دانشگاه فنی و حرفه ای خراسان رضوی
مشهد، ایران

fnoohi@tvu.ac.ir , f.noohi@gmail.com

چکیده. مشاهده تقارن و شکست آن در جهان‌بینی اولیه از طبیعت و هنر شروع می‌شود و پس از آن است که به عنوان ساختارهای اساسی در ریاضیات تعریف می‌شود. در این مقاله پس از گفتاری کوتاه درباب تقارن به کاربردی از آن در یافتن ریشه‌های معادلات درجه دو می پردازیم و مشاهده می‌کنیم که عدم وجود تقارن حل معادلات درجه سه را تا چه حد دشوارتر می‌کند.

۱. پیش‌گفتار

جستجوی الگوها و قاعده مندی‌ها همیشه برای انسان مهم بوده ونتایج آن نیز همواره برای درک پیچیدگی‌های جهان به ما کمک کرده است. در تاریخ علم و فرهنگ، تقارن‌ها به عنوان الگوی نظم مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تقارن در فرهنگ‌ها و مذاهب گوناگون جذابیت دارد و نشان دهنده هماهنگی و کمال است. در دوران باستان، دانش، هنر و طبیعت بر اساس نظم تقارنی مشترکی فهمیده می‌شد، اما در دوران معاصر این وحدت علوم طبیعی و انسانی از هم می‌پاشد. در هنر، تقارن‌ها و محاسبات تقارنی به قضاوت‌های ذهنی و ذوقی مربوط می‌شود. در حالی که در ریاضیات و علوم طبیعی، تقارن و عدم تقارن اصول اساسی توصیف طبیعت باقی می‌مانند، که کاربرد آن از شکل‌گیری ماده اولیه تا تکامل حیات را شامل می‌شود. در واقع، اکتشافات و قوانین

2020 Mathematics Subject Classification. 00A05, 97I10

واژگان کلیدی. تابع، حل معادله، تقارن، چندجمله‌ای.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۴/۳۱ بازنگری ۱۴۰۲/۵/۲۱ پذیرش ۱۴۰۲/۶/۲۶ انتشار برخط ۱۴۰۲/۶/۲۷

نحوه ارجاع به این مقاله: ف.نوحی، تقارن و کاربرد آن در حل معادلات ، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۵۲–۶۱.

کنونی در کیهان شناسی، فیزیک، شیمی و زیست شناسی با تقارن و عدم تقارن در ارتباط هستند. بر اساس نظریه‌های علمی شکستن تقارن کلید تنوع، پیچیدگی و ساختارهای جدید در طبیعت، از فیزیک و شیمی تا زیست شناسی است. بدون شکستن تقارن، جهان ثابت و بدون تغییر باقی می‌ماند. ساختارهای ریاضی این ارتباطات میان‌رشته‌ای را در طبیعت و هنر آشکار می‌کند [۱، ۲، ۴].

در ریاضیات قدیم، تقارن به اندازه‌های یکسان یا هماهنگی در برش‌های شکل‌ها در هنر، معماری و یا کیهان اشاره داشت. به عبارتی، وجود برش‌هایی در شکل‌ها که قابل انطباق هستند. بازتاب، چرخش و تناوب نمونه‌هایی از ویژگی‌های تقارنی هستند.

از سوی دیگر، وجود تقارن در شکل‌های هندسی و نمودارها می تواند به حل مسائل ریاضی کمک کند. در بخش بعد نمونه ای از این مورد را مشاهده می‌کنیم. این بخش برگرفته از [۳] است.

۲. تقارن حل معادلات ریاضی را آسان می کند

حل معادلات یک مهارت اصلی در کلاس ریاضی است. یکی از اساسی ترین معادلاتی که حل آن را یاد می‌گیریم معادله $f(x) = 0$ است که در آن f یک تابع تعریف شده روی مجموعه‌ای از اعداد است که مقادیر آن نیز عددی است. این معادله در واقع دنبال این است که کدام ورودی x خروجی 0 را به‌دست می‌دهد. به همین دلیل، گاهی اوقات جواب‌های این معادله را ''صفر'' یا ''ریشه'' تابع می‌نامند. در بین تمام معادلات، شاید معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{۱.۲}$$

اولین برخورد جدی دانش آموزان با معادلاتی باشد که راه حل بدیهی و ساده‌ای ندارند. فرمول

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

به دانش‌آموزان جبر کمک کرده است تا حل معادله درجه دوم (۱.۲) را به‌راحتی به خاطر بسپارند. شاید وقتی دانش آموز برای بار اول با این فرمول روبه‌رو شود برایش دلهره آور باشد ولی در عین ابهت و عظمت، یک راز ساده در آن پنهان است که حل هر معادله درجه دوم را آسان می‌کند: تقارن. حال ببینیم که تقارن چه تاثیری در فرمول حل معادله درجه دوم دارد و چگونه عدم تقارن، حل معادلات درجه سوم به شکل

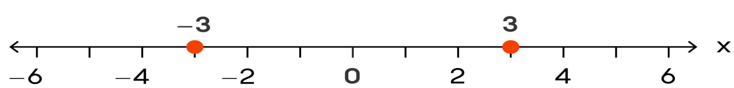
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

را بسیار بسیار دشوارتر می کند. در واقع آنقدر سخت‌تر که تعدادی از ریاضی‌دانان، در سده ۱۵۰۰، زندگی خود را در رقابتی تلخ برای حل معادلات درجه سوم سپری کردند، چیزی که برای معادلات درجه دوم به راحتی اتفاق می‌افتاد.

قبل از اینکه ریشه یک تابع درجه دوم را پیدا کنیم، با یک تابع آسان شروع می کنیم: ریشه‌های تابع $f(x) = x^2 - 9$ چیست؟ برای پیدا کردن آنها کافیست معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 = 9 \Longrightarrow$$
$$x = \pm 3.$$

یافتن این ریشه‌ها آسان است زیرا حل این معادله آسان است. تنها کاری که باید انجام دهیم این است که مقدار x را پیدا کنیم. توجه داشته باشید که ما به آن $\pm$ در خط آخر نیاز داریم، زیرا هر دوعدد مثبت و منفی 3 این ویژگی را دارند که وقتی آنها را به توان 2 می‌رسانیم، حاصل 9 است. یک بررسی سریع $f(3) = f(-3) = 0$ را تأیید می کند. در واقع، اینها ورودی‌هایی هستند که خروجی تابع $f(x)$ را صفر می کنند. این $\pm$ همچنین به تقارن ذاتی در این معادله اشاره میکند. این تابع درجه دوم دو ریشه دارد و اگر دو ریشه را روی یک محور عددی در نظر بگیریم، می‌بینیم که آنها نسبت به نقطه $x = 0$ متقارن هستند. از آن جایی که نمودار یک تابع



شکل ۱: تقارن ریشه‌ها در چند جمله‌ای درجه دو

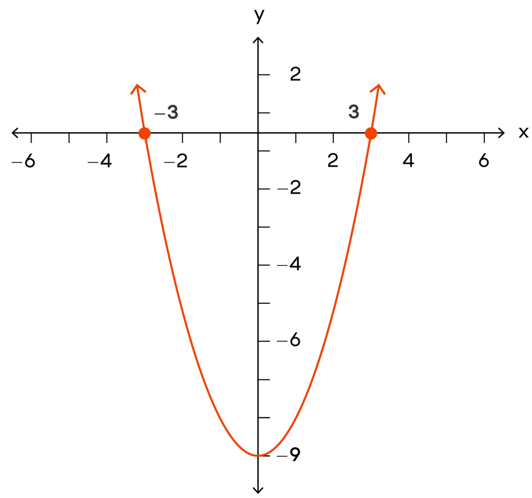
درجه دوم یک سهمی است، این بسیار منطقی به نظر می رسد زیرا هر سهمی دارای یک محور تقارن است که آن را به دو نیمه آینه‌ای تقسیم می کند. در مورد $f(x) = x^2 - 9$ محور تقارن، محور y یا همان خط $x = 0$ است. هنگامی که نمودار $f(x) = x^2 - 9$ را به روش معمول رسم می کنیم، می توانیم ریشه‌های معادله را روی محور x ببینیم که از محور y به یک فاصله هستند. شکل ۲ را ببینید.

برای یک معادله ی درجه دوم پیچیده‌تر مانند

$$f(x) = x^2 - 8x - 9$$

یافتن ریشه‌ها به اندکی تلاش بیشتر نیاز دارد.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 - 8x - 9 = 0 \Longrightarrow$$
$$x^2 - 8x = 9.$$



شکل ۲: تقارن ریشه‌ها نسبت به محور y

در این جا نیزمی‌توانیم $f(x)$ را برابر با صفر قرار داده و 9 را به سمت راست معادله ببریم، اما نمی‌توانیم با گرفتن جذر دو طرف معادله x را پیدا کنیم. زیرا وجود یک x دیگر در سمت چپ عبارت مانع می‌شود. اما نمودار این تابع نیز مانند هر چند جمله‌ای درجه دوم، متقارن است و ما می‌توانیم از این تقارن برای مدیریت مساله استفاده کنیم. فقط به کمی محاسبات جبری نیاز داریم تا تقارن را شفاف‌تر ببینیم. بیایید تابع $f(x) = x^2 - 8x - 9$ را به صورت $f(x) = x(x - 8) - 9$ بازنویسی کنیم. اکنون روی قسمت $x(x - 8)$ تمرکز می کنیم. این عبارت در دو موقعیت برابر با صفر خواهد بود، وقتی $x = 0$ و یا $x = 8$. این تضمین می کند که $f(0)$ و $f(8)$ منجر به نتیجه ی -9 خواهد شد. این به ما دو نقطه متقارن در سهمی می‌دهد، و از آنجایی که محور تقارن باید فاصله $x = 0$ و $x = 8$ را از وسط تقسیم کند، این محور باید خط $x = 4$ باشد. اکنون که تقارن پیدا را کردیم، وقت آن است که از آن استفاده کنیم. سهمی را چهار واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا محور تقارن آن از خط $x = 4$ به خط $x = 0$ حرکت کند. به بیان جبری، هر x را با $x + 4$ جایگزین می‌کنیم. بیایید تابع درجه دوم جدید حاصل از جایگزینی x با $x+4$ را g بنامیم، به عبارت دیگر $g(x) = f(x+4)$. حال بیایید ببینیم وقتی $g(x)$ را ساده می کنیم چه اتفاقی می افتد:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f(x+4) \\
&= (x+4)^2 - 8(x+4) - 9 \\
&= x^2 - 25.
\end{aligned}
$$

پس از این مراحل همه عبارت‌های حاوی x به‌جز جمله درجه دوم آن ناپدید شدند و این امر یافتن ریشه‌های g را آسان می‌کند.

$$\begin{aligned} x^2 \;-\; 25 \;=\; 0 \Longrightarrow \\ x^2 \;=\; 25 \Longrightarrow \\ x \;=\; \pm 5. \end{aligned}$$

بنابراین، ریشه‌های $g(x)$ مقادیر $x = \pm 5$ هستند، یعنی برای یافتن ریشه‌های $f(x) \;=\; x^2 - 8x - 9$ کافی است ریشه‌های g را چهار واحد به سمت راست انتقال دهیم. ریشه‌های f، مقادیر 5 ± 4 یا همان 9 و -1 هستند که با $f(-1) = f(9) = 0$ تایید می‌شوند.

حل این معادله درجه دوم کمی سخت تربود، به این معنی که آن را اندکی لغزاندیم و با حذف عبارت مزاحم x ، آن را به یک معادله درجه دوم ساده‌تر تبدیل کردیم. این رویکرد روی هر تابع درجه دوم کار خواهد کرد. با توجه به شکل کلی یک چند جمله‌ای درجه دوم دلخواه $f(x) \;=\; ax^2 + bx + c$ همیشه می‌توانیم محور تقارن آن را با اندکی محاسبه پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; ax^2 + bx + c \\ &= x(ax \;+\; b) \;+ c. \end{aligned}$$

در این فرم می‌بینیم که $f(0) \;=\; f(\,-\,\frac{b}{a}) \;= c$ ،یعنی محور تقارن در نیمه راه بین $x \;=\; 0$ و $x \;=-\,\frac{b}{a}$ است. به عبارت دیگر، محور تقارن هر چند جمله‌ای درجه دوم $f(x) \;=\; ax^2 + bx + c$ خط $x \;= -\frac{b}{2a}$ است. این خیلی آشنا به‌نظر می رسد. این عبارت در فرمول جواب معادله درجه دو پنهان شده است:

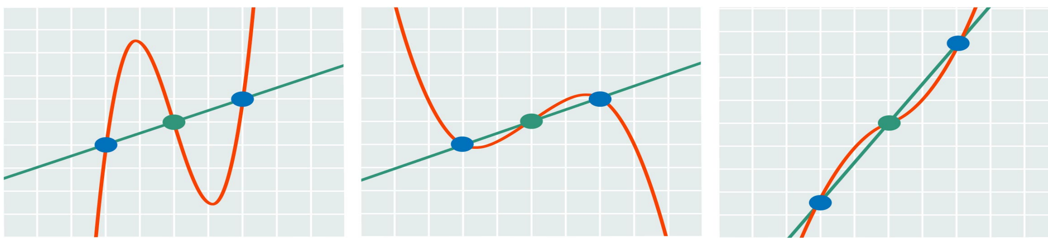
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

اگر این فرمول را به شکل زیر بازنویسی کنیم، دیدن آن آسان‌تر است:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

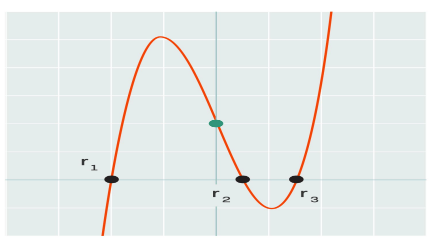
فرمول جواب معادله درجه دوم بر این واقعیت متکی است که ریشه‌های معادله ی $f(x) \;=\; ax^2 + bx + c$ نسبت به خط $x = \frac{-b}{2a}$ متقارن هستند و همانطور که در بالا انجام دادیم، می‌توان از این تقارن برای یافتن آنها استفاده کرد: فقط $f(x)$ را به اندازه $x = -\frac{b}{2a}$ انتقال می‌دهیم. این کار باعث حذف جمله ضریب x می‌شود که به ما این امکان را می‌دهد تا به راحتی معادله را حل کنیم. با انجام این کار، به فرمول معادله درجه دوم می‌رسیم.

حل معادلات درجه دوم با استفاده از قدرت تقارن ممکن است ما را تشویق کند تا یک تاکتیک مشابه را در حل معادلات درجه سوم امتحان کنیم. اما در حالی که چند جمله‌ای‌های درجه سه هم دارای تقارن هستند، تقارن آن‌ها از نوعی نیست که به حل معادلاتی مانند $f(x) = 0$ کمک کند. نمودارهای درجه سه ”تقارن نقطه‌ای“ دارند، به این معنی که یک نقطه خاص روی نمودار هر تابع چند جمله‌ای درجه سه وجود دارد که اگر خطی از آن نقطه عبور کند که نمودار را در جای دیگری قطع کرده باشد، در ادامه دوباره نمودار را در نقطه‌ای متقارن نسبت به آن نقطه قطع خواهد کرد، شکل ۳ راببینید. این یک نوع قوی از تقارن است، اما به یافتن ریشه



شکل ۳: تقارن نقطه‌ای در نمودار چندجمله‌ای درجه سه

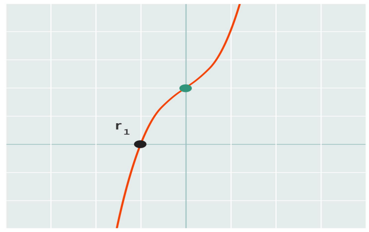
کمک نمی‌کند. دلیل آن این است که ریشه‌های یک تابع درجه سوم در جایی قرار دارند که نمودار تابع از خط افقی $y = 0$ یعنی محور x عبور می‌کند و به طور کلی، این نقاط عبور نسبت به نقطه تقارن منحنی درجه سه متقارن نیستند (شکل ۴) نقطه سبز رنگ نقطه تقارن منحنی است که در واقع همان نقطه عطف خم است. در



شکل ۴: عدم تقارن ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سه نسبت به نقطه تقارن منحنی

واقع، یک معادله درجه سوم ممکن است فقط یک ریشه داشته باشد و در این حالت تقارنی وجود ندارد، شکل ۵ را ملاحظه کنید. با این حال، قسمتی از کار قبلی ما با درجه دوم ها وجود دارد که می‌تواند کمک کننده باشد. تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را درنظر می گیریم. اگر ریشه‌های آن r_1 و r_2باشند، آنگاه می توانیم $f(x)$را به این صورت بنویسیم:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2). \qquad (۲.۲)$$



شکل ۵: چندجمله‌ای درجه سه با یک ریشه

وقتی این ضرب را انجام دهیم و عبارت را ساده کنیم، به نتیجه مفیدی خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - xr_2 - r_1x + r_1r_2) \\ &= a(x^2 - (r_1+r_2)x + r_1r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2. \end{aligned}$$

می بینم که چگونه ضریب جمله x شامل مجموع دو ریشهr_1 و r_2 می‌شود. این مربوط به یکی از فرمول‌های Vieta است.

با در نظر گرفتن تابع درجه دوم $f(x) = ax^2+bx+c$، مجموع دو ریشه همیشه $-\frac{b}{a}$ خواهد بود. این مساله را می‌توان با برابر قرار دادن فرم کلی معادله درجه دوم با (۲.۲) بررسی کرد:

$$ax^2+bx+c = ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2.$$

باید به خاطر داشته باشیم که تنها وقتی دو چند جمله‌ای برابرند که ضرایب جملات متناظر آنها یکسان باشد. در این حالت، این بدان معناست که ضرایب جمله‌های متناظر x در دو طرف معادله باید برابر باشند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$b = -a(r_1 + r_2)$$

و یا

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.$$

توجه کنید که تقسیم دو طرف این معادله بر 2 یک واقعیت جالب را نشان می‌دهد، و آن این است که میانگین دو ریشه تابع درجه دوم برابر با فاصله محور تقارن از مبدأ است:

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

این منطقی است، زیرا محور تقارن باید در وسط دو ریشه باشد و میانگین هر دو عدد دقیقاً در وسط آنها است. حال این رابطه جدید را درحوزه بحث قبل در نظر بگیرید. انتقال سهمی با حرکت دادن محور تقارن از

$x=-\frac{b}{2a}$ به $x=0$ میانگین دو ریشه را نیزاز $\frac{b}{2a}$ به 0 تغییر می‌دهد. اما اگر میانگین ریشه‌ها 0 باشد، مجموع ریشه‌ها نیز باید 0 باشد و از طرفی مجموع دو ریشه به صورت فاکتور در معادله درجه دوم ظاهر می‌شود:

$$f(x) = ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2.$$

این بدان معنی است که اگر تابع چند جمله‌ای درجه دوم را به نحوی تبدیل کنیم تا مجموع ریشه‌ها 0 شود، جمله x نیز ناپدید می‌شود و این همان چیزی است که به ما کمک کرد معادله درجه دوم قبلی خود را حل کنیم. نتیجه تقریبا مشابهی در مورد ریشه‌های توابع درجه سوم وجود دارد.

با در نظر گرفتن شکل کلی یک معادله درجه سوم $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ می‌توانیم همان کاری را که با معادله درجه دو انجام دادیم تکرار کنیم. اگرمعادله ی درجه سه دارای ریشه‌های r_1، r_2 ، و r_3 باشد، می‌توانیم تابع درجه سوم را به شکل زیر تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \\ &= ax^3 - a(r_1+r_2+r_3)x^2 + a(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x - ar_1r_2r_3. \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

اگر این مقدار را برابر فرم کلی معادله، یعنی $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ قرار دهیم، ضرایب متناظر باید برابر باشند و در نهایت برای محاسبه مجموع ریشه به فرمول ویتا برای مجموع ریشه‌های یک معادله درجه سه می‌رسیم:

$$r_1+r_2+r_3 = -\frac{b}{a}$$

توجه کنید که می‌توانیم هر دو طرف معادله را بر 3 تقسیم کنیم:

$$\frac{r_1+r_2+r_3}{3} = -\frac{b}{3a}$$

این به ما می‌گوید که مینگین ریشه‌های معادله درجه سه برابر است با $-\frac{b}{3a}$. حال، اگر تابع را به این مقدار انتقال دهیم، میانگین ریشه‌ها صفر خواهد شد که مجموع ریشه‌ها را نیز 0 می‌کند و در نتیجه عامل x^2 در معادله ناپدید می‌شود. به طور خلاصه، تبدیل $g(x) = f(x-\frac{b}{3a})$ چیزی را حاصل می‌کند که به نام فرم درجه سه ‘‘تحویل یافته’’ شناخته می‌شود، که به‌سادگی به این معنی است که هیچ عامل x^2 در آن وجود ندارد. چند جمله‌ای درجه سه تحویل یافته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$g(x) = ax^3 + mx + n,$$

که ضرایب m و n را می‌توان با کمک a، b، c و d در فرم اصلی درجه سه، به‌دست آورد.

این فرمول درجه سومی است که مانند فرمول درجه دوم هر معادله درجه سوم را حل می کند. اما سادگی و هارمونی حل معادله درجه دوم در اینجا وجود ندارد. توجه می کنیم که هر چند جمله‌ای درجه سه دارای سه

ریشه است که حداقل یکی از آنها حقیقی است. ریشه حقیقی دارد. با یافتن یکی از این سه ریشه و استفاده از (۳.۲) و برابر قراردادن آن با شکل اصلی معادله، می‌توان مجموع و حاصلضرب دو ریشه دیگر را به دست آورد و از آنجا این دو ریشه قابل محاسبه خواهند بود. بدون وارد شدن به جزئیات فرمول زیر را که یک ریشه معادله درجه سه را به دست می دهد بیان می کنیم:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+\sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)-\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}-\frac{b}{3a}$$

این فرمول معروف به فرمول کاردانو[۱] است که در سال ۱۵۴۵ توسط کاردانو منتشر شد.

مراجع

[1] P. Ball, *Patterns in Nature*, University of Chicago Press, US. 2016.

[2] J.H. Conway, H. Burgiel and C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, Taylor Francis Inc. 2008.

[3] P. Honner, *The symmetry that makes solving math equations easy*, Quanta Magazine 2023, https://www.quantamagazine.org/the-symmetry-that-makes-solving-math-equations-easy-20230324/

[4] I.G. Johnston, K. Dingle, S.F. Greenbury and A.A. Louis, *Symmetry and simplicity spontaneously emerge from the algorithmic nature of evolution*, PNAS, 119 (2022), no. 11, e2113883119.

[۱] Cardano